Krzysztof Mostowski

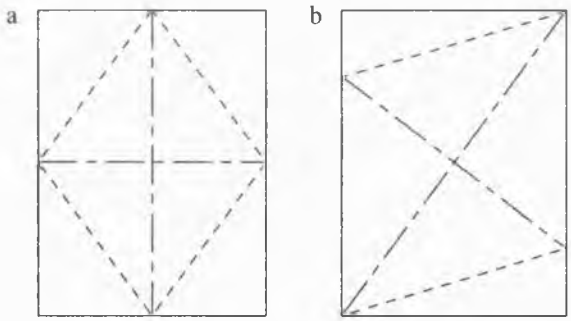
Romby w prostokącie

Czyli jak wykorzystać kartkę papieru A4 i o rombach wpisanych w prostokąt.

Teoria

Kartka papieru formatu A4 opisuje bardzo interesujący prostokąt. Według normy europejskiej ma on wymiary 297 × 210 mm. Z dużą dokładnością można powiedzieć, że stosunek boków tego prostokąta, dłuższego do krótszego, wyznacza liczba $\sqrt{2}$. Można łatwo sprawdzić na kalkulatorze, że 297 ÷ 210 = 1,4142857... . Zgadza się, z dokładnością do czwartego miejsca po przecinku. Dlaczego takie wymiary, a nie inne? Ci, którzy ustanawiali tę normę, chcieli, aby po zgięciu kartki papieru na pół powstawała znowu kartka o wymiarach znormalizowanych i podobna w kształcie do wyjściowego prostokąta. Zapisując to odpowiednią proporcją, widać, że wymaganie to spełniają tylko takie prostokąty, dla których proporcja dłuższego do krótszego boku jest równa liczbie $\sqrt{2}$.
Ta proporcja boków sprawia, że kartki papieru A4, i innych kartek z tej rodziny, A1, A2, A3, itd, a również z rodziny B1, B2, B3,... można używać do wielu interesujących konstrukcji przestrzennych. Można z nich łatwo uzyskać np. romby, o stosunku przekątnych równych $\sqrt{2}$. Takie romby występują np. jako ściany dwunastościanu rombowego.

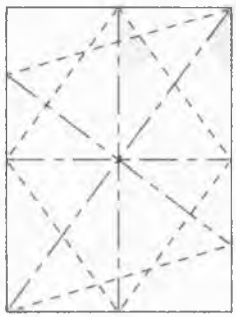
W każdy prostokąt można wpisać romb w taki sposób, że przekątne rombu są osiami symetrii prostokąta. Czy to jest jedyny sposób i czy to jest największy z takich rombów? Nie, jest jeszcze jeden sposób na otrzymanie takiego rombu z kartki papieru. Trzeba zbliżyć do siebie przeciwległe wierzchołki kartki papieru i nałożyć dokładnie wierzchołek na wierzchołek, np. lewy dolny na prawy górny, a następnie kartkę zagiąć. W taki sposób (1b):



Rysunek 1
a. Najmniejszy romb wpisany w prostokąt.
b. Największy romb wpisany w prostokąt.

W obu przypadkach zostały zaznaczone przekątne rombu — ślady pierwszych dwóch zgięć.

Po tym zagięciu, zginamy jeszcze raz symetrycznie i pod kątem prostym, tak jak na rysunku. Okazuje się, że otrzymana figura to też romb i znów o przekątnych w tej samej proporcji. Można porachować i sprawdzić to rachunkowo. Większość ludzi tak właśnie robi. Ale można też zobaczyć to wprost, porównując odpowiednie trójkąty.



Zaznaczone kąty są równe, gdyż należą do dwóch trójkątów utworzonych przez przekątne prostokąta (ćwiartki dużego prostokąta) i jego przeciwległych boków. Dwa trójkąty prostokątne są podobne, jeśli mają jeden ostry kąt równy.

Rysunek 2

Więc też podobne są romby.

Jest jeszcze dużo podobnych rombów wpisanych w kartkę papieru. Sformułuję odpowiednią definicję i twierdzenie.

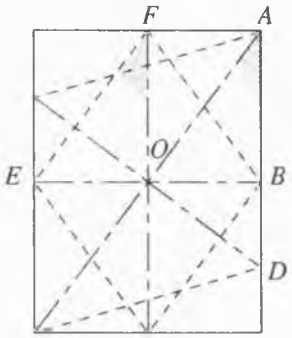
Definicja. Romb wpisany w prostokąt to taki romb, którego wszystkie wierzchołki dotykają boków prostokąta, oraz do każdego z boków prostokąta należy przynajmniej jeden wierzchołek rombu.

To zastrzeżenie jest potrzebne, aby odrzucić przypadki, w których po dwa wierzchołki należą do dłuższych boków prostokąta, a żaden nie należy do krótszych.

Tw. 1. Największy i najmniejszy romb wpisany w dany prostokąt są podobne. Najmniejszy romb wpisany w dany prostokąt ma przekątne równoległe do boków tego prostokąta, a największy romb wpisany w prostokąt ma przekątną, która jest jednocześnie przekątną prostokąta.

Dowód:

Wysokość w trójkącie prostokątnym, która nie jest jego bokiem, dzieli go na dwa trójkąty podobne, oba podobne do trójkąta wyjściowego. Popatrzmy na ćwiartki rombów — trójkąty prostokątne.



Rysunek 3

$\Delta OEF \equiv \Delta OAB$, $\Delta OAB \sim \Delta AOD$, zatem $\Delta OEF \sim \Delta OAD$.

Tw. 2. Wszystkie romby wpisane w dany prostokąt są podobne.

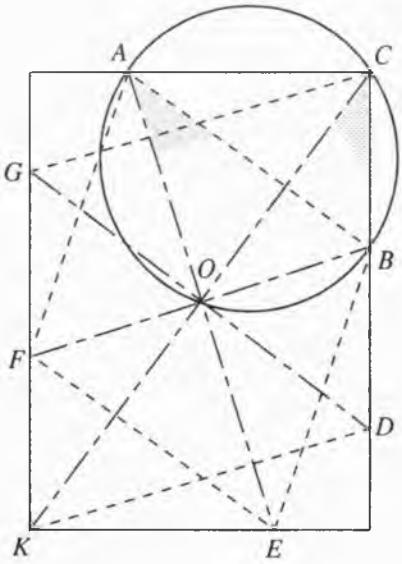
Dowód: Wystarczy pokazać, że dowolny romb wpisany w prostokąt jest podobny do największego rombu wpisanego w ten prostokąt. W tym celu wystarczy pokazać podobieństwo pewnych trójkątów prostokątnych, a dokładniej ćwiartek tych wpisanych rombów.

Wykorzystamy dwa twierdzenia znane z geometrii.

L1. Jeżeli suma naprzeciwległych kątów czworokąta jest równa 180°, to na tym czworokącie można opisać okrąg.

L2. Kąty wpisane w okrąg, oparte na tym samym łuku są sobie równe.

Popatrzmy na rysunek 4. Niech *ABEF* będzie dowolnym rombem wpisanym w narysowany prostokąt. Niech *GCDK* będzie tym największym rombem. Aby udowodnić podobieństwo rombów *ABEF* i *GCDK*, wystarczy pokazać równość kątów $\sphericalangle OAB$ i $\sphericalangle OCB$ $(= \sphericalangle OCD)$.



Rysunek 4

Kąty $\sphericalangle AOB$ i $\sphericalangle ACB$ są proste, ich suma równa 180°. Na czworokącie *OACB* można więc opisać okrąg, na mocy **L1**. Kąty $\sphericalangle OAB$ i $\sphericalangle OCB$ są wpisane w okrąg i oparte na tym samym łuku *OB*, a więc na mocy **L2** są równe. Trójkąty *OAB* i *OCD* są prostokątne i ich wymienione kąty ostre, jako wpisane, oparte na tym samym łuku są równe. Zatem $\Delta OAB \sim \Delta OCD$, czyli dane romby są również podobne. Tyle teorii. A teraz

Praktyka

Zwykła kartka papieru formatu A4 okazuje się świetnym budulcem do konstruowania różnych interesujących brył. Można z niej tworzyć romby o proporcji przekątnych równej $\sqrt{2}$. Takie właśnie, jakie występują jako ściany dwunastościanu rombowego. Do tego najlepiej nadają się te największe romby wpisane w tę kartkę, odpowiednio spinane zszywkami. Możemy też utworzyć z nich szkielet czworościanu foremnego. Zachęcam. Patrząc matematycznie, po drodze zobaczymy na pewno jeszcze dużo innych interesujących spraw.

Krzysztof Mostowski,
Zakład Dydaktyki Matematyki
Akademii Podlaskiej w Siedlcach